Mecânica e Ondas – MO

Curso LERC

1º EXAME

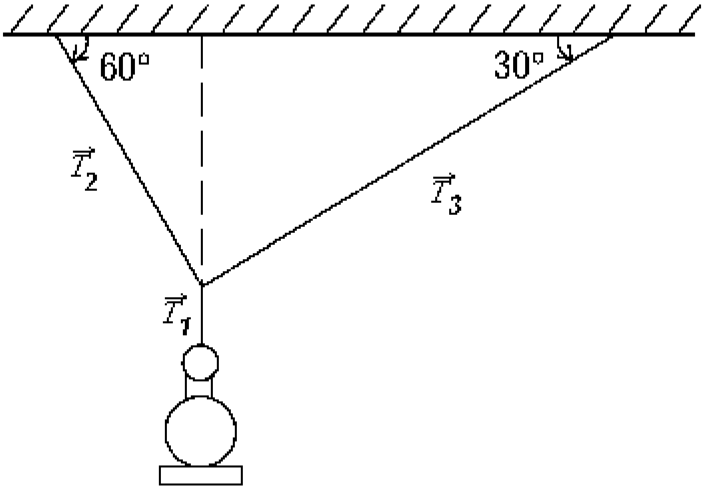
TAGUS PARK

2011/2012 – 2º Semestre – 4-06-2012 – 9h00m

Duração: 3h00 Resp: Prof. João Carlos Fernandes (Dep. Física)

NºI_I_I_I_I_I Nome: RESOLVIDO

PROBLEMA 1 (1.5 valores)



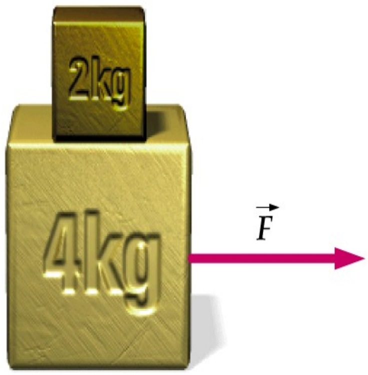
Um objecto de massa ***m*** está pendurado por fios como se mostra na figura.
Calcule a amplitude das 3 tensões nos 3 fios.

No corpo $T_1 = mg$, no ponto de encontro dos 3 fios $\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{T}_3 = 0$.

$$\begin{cases} T_1 = mg \\ \vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{T}_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_1 = mg \\ 0 - T_2 \cos 60^\circ + T_3 \cos 30^\circ = 0 \\ -mg + T_2 \sin 60^\circ + T_3 \sin 30^\circ = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_1 = mg \\ T_2 \dfrac{1}{2} = T_3 \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ T_2 \dfrac{\sqrt{3}}{2} + T_3 \dfrac{1}{2} = mg \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_1 = mg \\ T_2 = \sqrt{3} T_3 \\ 3T_3 + T_3 = 2mg \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_1 = mg \\ T_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} mg \\ T_3 = \dfrac{1}{2} mg \end{cases}$$

PROBLEMA 2 (1.5 valores)



O bloco $\mathbf{M_1 = 4\ kg}$ está em cima de uma mesa e desloca-se sem atrito. O bloco $\mathbf{M_2 = 2\ kg}$ desloca-se sobre $\mathbf{M_1}$ e tem atrito estático $\mu_S = \dfrac{2}{3}$.

a) Qual a máxima força que pode ser aplicada a **1** de modo a que **2** não deslize?

b) Se a força for metade do máximo anterior, qual a aceleração dos 2 blocos

…………………………………………………………

$$\begin{cases} Corpo\ 2:\ M_2 a = F_a \\ Corpo\ 1:\ M_1 a = F - F_a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{F}{M_1 + M_2} \\ F_a = \dfrac{M_2}{M_1 + M_2} F \end{cases}$$

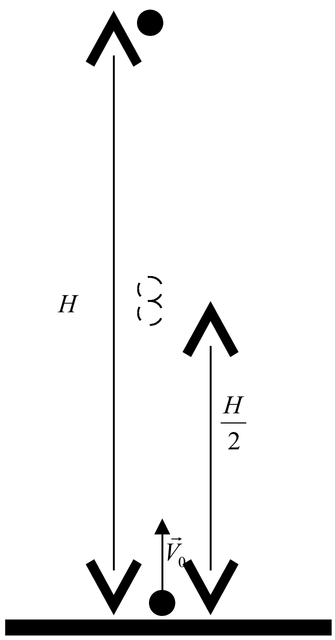
a) $$\begin{cases} a = \dfrac{F}{M_1 + M_2} \\ F_a = \dfrac{M_2}{M_1 + M_2} F \end{cases} \Rightarrow F_{Max} = \frac{M_1 + M_2}{M_2} F_{aMax} = \frac{M_1 + M_2}{M_2} \mu_S M_2 g = 6\mu_S g = 4g \quad (N)$$

b) $$F = \frac{F_{Max}}{2} = 2g \Rightarrow \quad a = \frac{F}{M_1 + M_2} = \frac{2g}{6} = \frac{g}{3}$$

PROBLEMA 3 (1.5 valores)

Uma massa é largada verticalmente de uma altura H (sem velocidade inicial). Nesse mesmo instante uma outra massa é atirada verticalmente, de baixo para cima, com velocidade inicial V_0.

Qual deve ser o valor de V_0 para que se encontrem a meio?



…………………………………………………………..

A altura de cada um dos corpos escreve-se:

$$\begin{cases} y_1 = H - \dfrac{1}{2} g t^2 \\ y_2 = V_0 t - \dfrac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

No ponto de encontro $y_1 = y_2 \Rightarrow t = \dfrac{H}{V_0}$ onde t representa o tempo até ao encontro. Substituindo na equação obtemos a solução

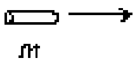
$$\frac{H}{2} = H - \frac{1}{2} g \left(\frac{H}{V_0} \right)^2 \Rightarrow \frac{1}{2} g \left(\frac{H}{V_0} \right)^2 = \frac{H}{2} \Rightarrow V_0^2 = gH \Rightarrow V_0 = \sqrt{gH}$$

PROBLEMA 4 (1.5 valores)

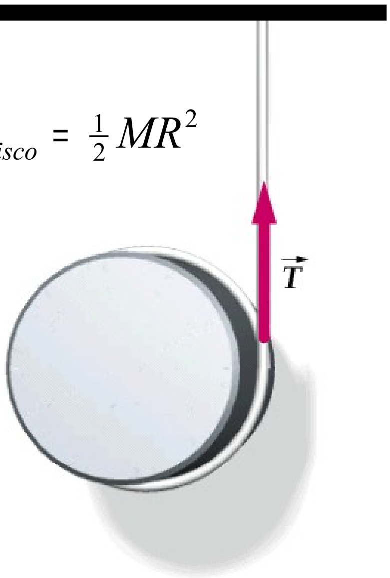
Uma bala de massa $\boldsymbol{m}$, viajando com velocidade $V_0 = 100m/s$ atinge e fica incrustada num bloco de um pêndulo matemático de massa $\boldsymbol{M}$.

a) Qual a velocidade do conjunto imediatamente após o choque?

b) Qual a altura máxima **h** a que o conjunto se eleva?



$$I_{Disco} = \tfrac{1}{2} MR^2$$



……………………………………………………

a) O choque não é elástico, por isso só existe conservação do momento linear:

$$mV_0 = (m+M)V \Rightarrow V = \frac{m}{m+M} V_0 .$$

b) Há conservação da energia mecânica:

$$\frac{1}{2}(m+M)V^2 = (m+M)gh \Rightarrow h = \frac{V^2}{2g} = \frac{1}{2g}\left(\frac{m}{m+M}\right)^2 V_0^2$$

PROBLEMA 5 (2 valores)

Um disco de massa **M** e raio **R** tem um fio enrolado à sua volta. Quando seguramos na ponta do fio (ponta fixa) o disco cai.

a) Qual a aceleração linear do centro do disco, na queda?

b) Qual a tensão T no fio?

c) Qual a aceleração angular do disco, na queda?

……………………………………………………………………………..

O disco tem translação e rotação. $\begin{cases} Ma = Mg - T \\ I\alpha = TR \\ a = \alpha R \end{cases}$. Resolvendo o sistema respondemos às 3 alíneas.

$$\begin{cases} Ma = Mg - T \\ I\alpha = TR \\ a = \alpha R \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Ma = Mg - T \\ \frac{1}{2}MR^2\frac{a}{R} = TR \Rightarrow \\ \alpha = \frac{a}{R} \end{cases} \begin{cases} Ma = Mg - T \\ \frac{1}{2}Ma = T \\ \alpha = \frac{a}{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{2}Ma = Mg \\ T = \frac{1}{2}Ma \\ \alpha = \frac{a}{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{3}g \\ T = \frac{1}{3}Mg \\ \alpha = \frac{2}{3}\frac{g}{R} \end{cases}$$

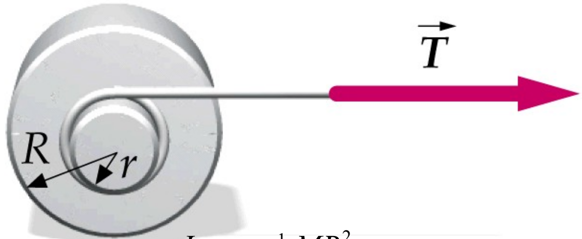
PROBLEMA 6 (2 valores)

Um disco de massa **M** e raio **R** é acelerado por um fio enrolado à volta de um ressalto de raio **r** usando uma força **T**. O atrito estático é suficiente para ele rolar sem escorregar

a) Qual a aceleração linear do cilindro?

b) Qual o valor da força de atrito?

c) O que acontece às duas grandezas anteriores se $r = \dfrac{R}{2}$?



$$I_{Disco} = \tfrac{1}{2} MR^2$$

…………………………………………………………………..

O disco tem translação e rotação. $\begin{cases} Ma = T + F_a \\ I\alpha = Tr - F_a R \\ a = \alpha R \end{cases}$. Resolvendo o sistema respondemos às 2 alíneas.

$$\begin{cases} Ma = T + F_a \\ I\alpha = Tr - F_a R \\ a = \alpha R \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Ma = T + F_a \\ \frac{1}{2}MR^2 \frac{a}{R} = Tr - F_a R \\ a = \alpha R \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Ma = T + F_a \\ \frac{1}{2}Ma = T\frac{r}{R} - F_a \\ a = \alpha R \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{2}Ma = \left(1 + \frac{r}{R}\right)T \\ F_a = -\frac{1}{2}Ma + \frac{r}{R}T \\ a = \alpha R \end{cases}$$

a) $a = \frac{2}{3M}\left(1 + \frac{r}{R}\right)T$ b) $F_a = \frac{1}{3}\left(2\frac{r}{R} - 1\right)T$ c) $r = \frac{R}{2} \Rightarrow F_a = 0$ e $a = \frac{T}{M}$

PROBLEMA 7 (1 valores)

Mostre que a energia total de um satélite artificial de massa **m** é simétrica da sua energia cinética?

…………………………………………………….

<u>Solução:</u>

Num satélite a força centrífuga equilibra a força gravítica. $m\frac{V^2}{r} = mg\frac{R^2}{r^2}$ o que implica que se verifica sempre a relação: $V^2 = g\frac{R^2}{r}$. A energia total é dada pela soma da cinética com a potencial gravítica.

$E_T = K + U \quad K = \frac{1}{2}mV^2 \quad U = -mg\frac{R^2}{r}$. Usando a relação anterior: $U = -mg\frac{R^2}{r} = -mV^2 = -2K$.

Obtemos: $E_T = K + U = K - 2K = -K$.

PROBLEMA 8 (1 valores)

Um satélite artificial de massa **m** está em órbita estável a uma altitude **H** acima da superfície terrestre. Em certo momento perde metade da sua energia cinética. Determine qual a nova altitude **h** onde encontra uma orbita estável?

……………………………………………..

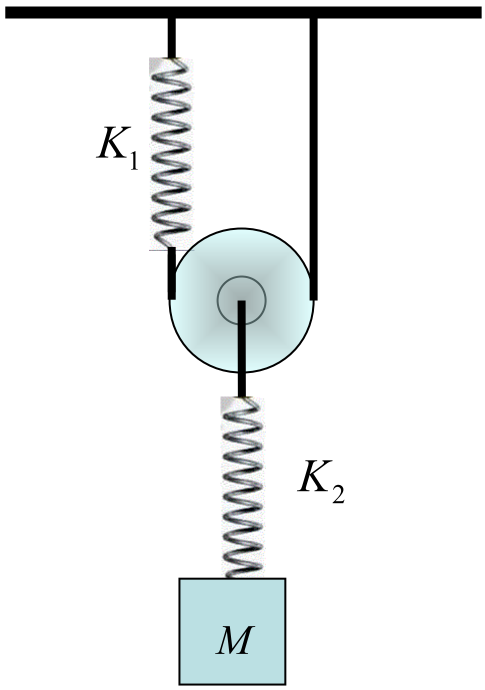
<u>Solução:</u> Podemos usar a relação do problema anterior: $V^2 = g\frac{R^2}{r}$.

Satélite na orbita inicial 1: $V_1^2 = g\frac{R^2}{R+H} \Rightarrow K_1 = \frac{1}{2}mg\frac{R^2}{R+H}$.

Satélite na orbita final 2: $V_2^2 = g\frac{R^2}{R+h} \Rightarrow K_2 = \frac{1}{2}mg\frac{R^2}{R+h}$.

$$K_2 = \frac{1}{2}K_1 \Rightarrow \frac{1}{2}mg\frac{R^2}{R+h} = \frac{1}{4}mg\frac{R^2}{R+H} \Rightarrow 2(R+H) = R+h \Rightarrow h = R + 2H.$$

PROBLEMA 9 (1.5 valores)



O sistema da figura é constituído por duas molas de constantes diferentes K_1 e K_2, uma roldana de massa desprezável e uma massa M.

Na situação de equilíbrio estático qual a deformação de cada uma das molas x_1 e x_2 ?

Na mesma situação de equilíbrio estático, qual o alongamento total x quando é pendurada a massa M?

Qual a frequência ω de de oscilação deste sistema?

………………………………………………………….

Solução: No corpo verifica-se $T = Mg$.

a) Na mola 2 verifica-se: $T = F_{e2} = K_2 x_2 \Rightarrow x_2 = \dfrac{Mg}{K_2}$. No eixo da roldana actua T. Nos extremos da roldana actua a força $\dfrac{T}{2}$.

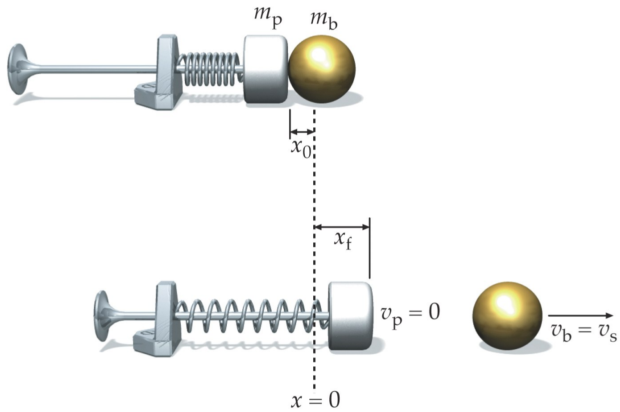
Na mola 1 verifica-se: $\dfrac{T}{2} = F_{e1} = K_1 x_1 \Rightarrow x_1 = \dfrac{Mg}{2K_1}$.

b) Quando a mola 1 estica x_1 o eixo da roldana (e massa M) desce $\dfrac{x_1}{2}$. Quando a mola 2 estica x_2 a massa M desce x_2.

Conclusão: $x = \dfrac{x_1}{2} + x_2 = \dfrac{Mg}{4K_1} + \dfrac{Mg}{K_2} = Mg\dfrac{4K_1 + K_2}{4K_1 K_2}$.

c) $K_{equiv} = \dfrac{Mg}{x} = \dfrac{4K_1K_2}{4K_1 + K_2} \Rightarrow \omega = \sqrt{\dfrac{K_{equiv}}{M}} = \sqrt{\dfrac{4K_1K_2}{4K_1 + K_2}\dfrac{1}{M}}$.

PROBLEMA 10 (2 valores)



O flipper da figura é constituído por uma mola de constante $K = 40\ N/m$ ligado a um êmbolo de massa $m_p = 10\ g$. Inicialmente o êmbolo está na posição $x = 0$. A mola é comprimida de uma distância $x_0 = 2\ cm$, encosta-se uma bola de massa $m_b = 90\ g$ e larga-se.

a) Qual a posição em que a bola desencosta do êmbolo e qual a velocidade de saída da bola?

b) Em que posição x_f pára o êmbolo depois de largar a bola?

c) Escreva uma função apropriada para a oscilação do sistema mola êmbolo após a saída da bola.

……………………………………………………………..

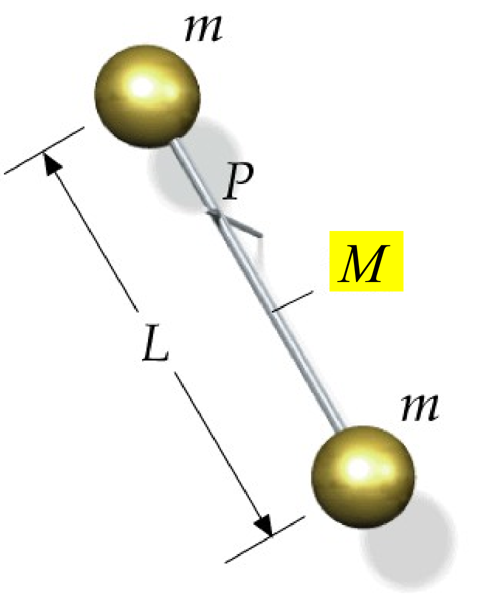
Solução: a) A bola desencosta quando atinge a velocidade máxima, isto é quando $x = 0$. Há conservação da energia mecânica. Energia total toda comprimida = energia total sem alongamento: $\dfrac{1}{2}Kx_0^2 = \dfrac{1}{2}\left(m_p + m_b\right)V^2 \Rightarrow V = \sqrt{\dfrac{K}{m_p + m_b}}x_0 = 0.4\ \text{m/s}$.

b) O êmbolo segue sem bola e vai converter a sua energia cinética em potencial elástica.

$$\frac{1}{2}m_pV^2 = \frac{1}{2}Kx_f^2 \Rightarrow x_f = \sqrt{\frac{m_p}{K}}V = \sqrt{\frac{m_p}{m_p + m_b}}x_0 = \frac{2}{\sqrt{10}}\ \text{cm}$$

c) A frequência de oscilação do êmbolo é: $\omega = \sqrt{\dfrac{K}{m_p}}$. $x = x_f \sin(\omega t)$.

PROBLEMA 11 (1.5 valores)



Considere um haltere constituído por 2 massas **m** pontuais e uma barra de comprimento **L** e massa **M**. O haltere oscila em torno de um ponto **P** à distância **x** do **CM**. $I_{CM_{vara}} = \frac{1}{12}ML^2$

a) Qual o período de oscilação deste pêndulo físico?

b) Qual deve ser a distância **x** para que o período seja mínimo?

....

Solução: a) Começamos por calcular o momento total de inércia em relação ao eixo de rotação:

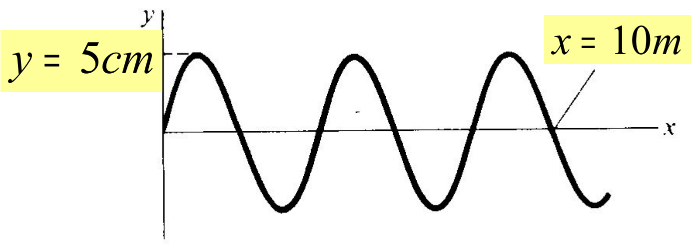
$$I = m\left(\frac{L}{2} - x\right)^2 + m\left(\frac{L}{2} + x\right)^2 + \frac{1}{12}ML^2 + Mx^2 .$$

$I = \frac{6m + M}{12}L^2 + (2m + M)x^2$. A distância entre o CM e o eixo de rotação vale: $d = x$. Obtemos:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{6m+M}{12}L^2 + (2m+M)x^2}{(2m+M)gx}}$$ b) Para o mínimo exige-se

$$\frac{dT}{dx} = 0 \Rightarrow x_{min} = \sqrt{\frac{6m+M}{12(2m+M)}}L$$

PROBLEMA 12 (1.5 valores)



A figura representa uma onda no instante t = 0. Sabe-se que tem velocidade V = 12 m/s.

a) Determine a sua amplitude, frequência e comprimento de onda.

b) Escreva a respectiva função de onda.

c) Qual a velocidade transversal de uma partícula em $x = \lambda$ no instante t = 0?

Solução: a) $A = 5\ cm$; $\frac{5}{2}\lambda = 10 \Rightarrow \lambda = 4\ \text{m}$;

$$V = f\lambda \Rightarrow f = \frac{V}{\lambda} = 3\ Hz .$$

b) $K = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{2}\ m^{-1}$; $\omega = 2\pi f = 6\pi\ rad/s$,

$$\Psi = 5sen\left(\frac{\pi}{2}x - 6\pi t\right)\quad cm$$

c) $\left.\frac{d\Psi}{dt}\right)_{t=0} = \frac{\pi}{2}5\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$. $\left.\frac{d\Psi}{dt}\right)_{x=\lambda} = \frac{\pi}{2}5\cos\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right) = \frac{5}{2}\pi\quad cm/s$.

PROBLEMA 13 (1.5 valores)

Um estudante deixa cair um diapasão de frequência $f_0 = 540\ Hz$ dentro de um poço para determinar a sua profundidade. Sabendo que a frequência mais baixa que conseguiu ouvir foi $f = 340\ Hz$ determine:

(considere que a velocidade do som é $c = 340\ m/s$ e que $g = 10\ m/s^2$)

a) Determine a profundidade do poço?

b) Ao fim de quanto tempo ouviu o estudante o som de $f = 340\ Hz$?

………………………………………………………………………………………..

Solução: A frequência mais baixa acontece para a velocidade máxima, ou seja no fundo do poço.

a) $f = \dfrac{1}{1+\dfrac{V}{c}} f_0 \Rightarrow 1+\dfrac{V}{c} = \dfrac{f_0}{f} \Rightarrow V = c\dfrac{f_0 - f}{f} = 200\ m/s$. A velocidade no fundo está relacionada com a altura (conservação da energia): $mgH = \dfrac{1}{2}mV^2 \Rightarrow H = \dfrac{V^2}{2g} = 2000\ m$

b) O tempo total é a soma do tempo de queda do diapasão + o tempo que o som leva a chegar do fundo até ao topo. Para o tempo de queda usamos $H = \dfrac{1}{2}gt_d^2 \Rightarrow t_d = \sqrt{\dfrac{2H}{g}} = 20\ s$. Para o tempo de subida usamos $H = ct_s \Rightarrow t_s = \dfrac{H}{c} = 2000/340$. O tempo total vem $t_t = t_d + t_s = \sqrt{\dfrac{2H}{g}} + \dfrac{H}{c}$.

FINAL do EXAME

FORMULÁRIO

$m\vec{a} = \sum \vec{F}$; $I\vec{\alpha} = \sum \vec{\tau}$ **Com:** τ o momento de torção e α a aceleração angular. $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

Cinemática à superfície da Terra: $a = -g$; $V = V_0 - gt$; $y = y_0 + V_0 t - \frac{1}{2}gt^2$

$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ $\tau = I\alpha$ $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ $L = I\omega$ $v = \omega r$ $a = \alpha r$; $\vec{p} = m\vec{v}$ $F_a = \mu N$ $\Delta W = F \Delta s$ $\Delta W = \tau \Delta \theta$

$K_{translação} = \frac{1}{2}mv^2$; $K_{rotação} = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}I\frac{v^2}{r^2}$; $U = mgh$ $\vec{R}_{cm} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i}$; $I = I_{CM} + md^2$

$I_{partícula} = mr^2$; $I_{esfera} = \frac{2}{5}mr^2$; $I_{disco} = I_{cilindro} = \frac{1}{2}mr^2$; $I_{anel} = mr^2$; $I_{vara} = \frac{1}{12}ML^2$

$P_{ext} = -\frac{gmR^2}{r^2}$; $P_{int} = -\frac{gm}{R}r$; $U_{ext} = -\frac{gmR^2}{r}$; $g = G\frac{M}{R^2}$ $F_{cent} = m\frac{v^2}{r} = m\omega^2 r$

$U_{max} = \frac{1}{2}KA^2$; $K_{max} = \frac{1}{2}mv_{max}^2$; $v_{max} = \omega A$; $\frac{1}{2}Kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}KA^2$

$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mdg}}$; $F_{elast} = -Kx$ $\omega = 2\pi f$; $K = \frac{2\pi}{\lambda}$; $v = \frac{\omega}{K}$; $f = \frac{c \mp V_R}{c \mp V_F} f_0$

....