

**Mecânica e Ondas 2º Semestre 2013/14****Guia do Plano Inclinado****Trabalho laboratorial sobre Dinâmica do corpo rígido****Introdução, Objectivos e Equipamento**

Pretende-se com estes trabalhos laboratoriais levar os estudantes ao contacto experimental com a Mecânica, nomeadamente a aquisição e cálculo de coordenadas e funções elementares: posição, tempo, velocidade e aceleração. A partir delas é possível chegar a funções mais específicas (menos óbvias) como sejam neste caso do momento de inércia, do momento angular e da energia cinética de rotação.

**Objectivos:**

- Perceber o que é o momento de inércia e como depende da geometria e massa de um corpo.
- Perceber que é o momento de inércia que regula a rotação assim como a massa regula a translação de corpos e que a energia cinética total é partilhada entre rotação e translação.
- Verificar as relações entre as diferentes grandezas que descrevem o movimento de rotação e de translação.

Dispomos, para o efeito, de uma rampa inclinada com o comprimento aproximado de 250 cm munida de 24 detectores (sensores de posição), equi-espaçados ao longo do seu comprimento. Esta rampa foi produzida pelo IST (Departamento de Electrónica) e permite à Física simular a queda de objectos ao longo de um plano inclinado (com inclinação variável), permitindo distinguir exemplos de escorregamento sem rolamento e rolamento sem escorregamento.

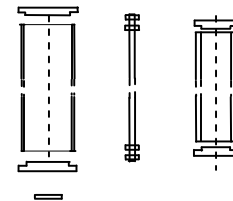
Neste trabalho é proposto aos alunos que realizem uma sucessão de lançamentos de cilindros de vários tipos (ocos, maciços, etc.) e segundo vários ângulos de inclinação da rampa, de modo a colher conjuntos de pares (posição, tempo).

O momento de inércia em torno do eixo de rotação comum a todos os objectos, o eixo longitudinal do cilindro exterior, obtém-se somando os momentos de todas as peças componentes de cada cilindro; cilindro maciço (parafuso interior), cilindro oco e porcas.

Os dados, medidos e calculados, relativos aos cilindros são os seguintes:

**Cilindro A:**  $m_A = 0.187\text{kg}$ ,  $I_A = 80 \pm 5\% \text{ kg}\times\text{mm}^2$

**Cilindro B:**  $m_B = 0.616\text{kg}$ ,  $I_B = 120 \pm 5\% \text{ kg}\times\text{mm}^2$



Todos os alunos dispõem de computador e software próprio instalado (LabView). A aquisição é feita recorrendo a placas de hardware NI-DAC (USB – 6008) às quais se associa software apropriado, desenvolvido em ambiente LabView, obtendo-se um output compatível com a manipulação entre os diferentes elementos do grupo de trabalho.

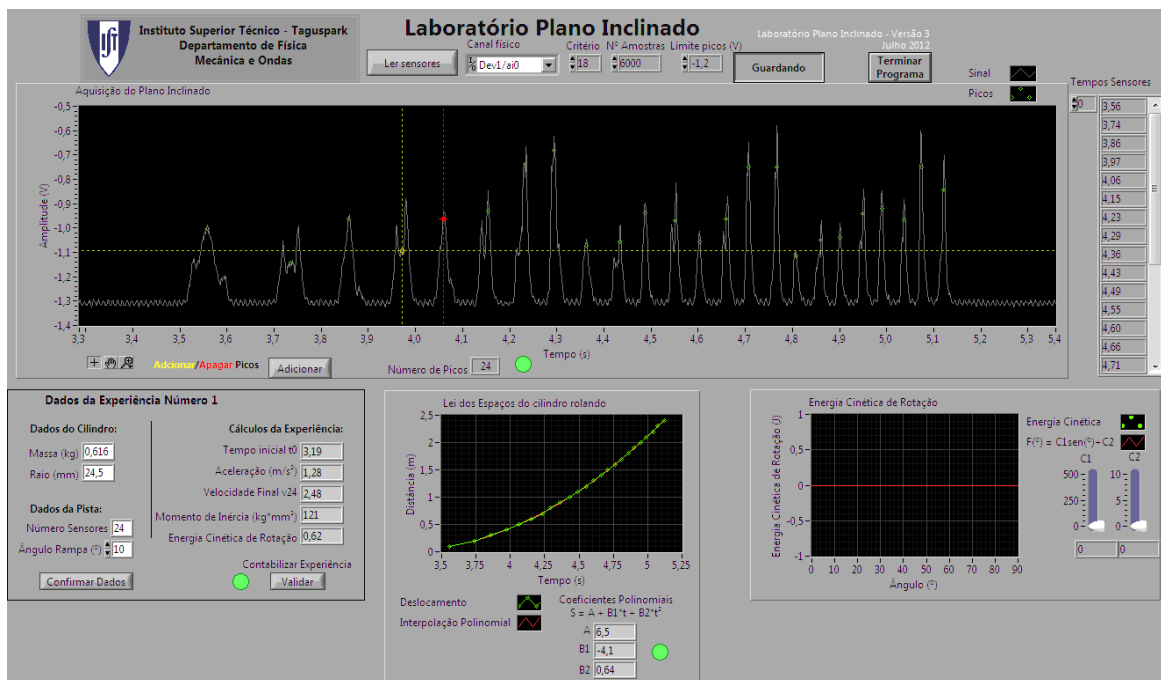
A partir destes pares (posição, tempo) pede-se aos alunos que obtenham, por cálculo e métodos gráficos, novas grandezas, nomeadamente a aceleração ao longo da rampa para cada caso. O objectivo final é o cálculo experimental do momento de inércia de cada um dos sólidos usados na experiência e a sua comparação com o valor teórico. Como sabemos o cálculo do momento de inércia é fundamental para a determinação de outras grandezas da Mecânica associadas à rotação, como sejam o momento angular e a energia cinética de rotação.

## Parte I – Experimental

Este trabalho laboratorial inicia-se com o lançamento de cilindros numa rampa e aquisição automática por computador dos instantes de passagem de cada cilindro pelos detectores colocados na rampa.

Comece por criar na sua área de aluno um directório para receber o ficheiro executável deste trabalho. Vá à página da cadeira em <http://mo-lerc-tagus.ist.utl.pt> entre em **laboratório** ⇒ **1º trabalho de Laboratório**. Aparece-lhe o ficheiro: **Rampa V3** que deve copiar para a sua área fazendo **Save to disk** para o directório que acabou de criar no seu **Ambiente de trabalho**. Faça o winzip dessa file para extrair o ficheiro **RampaV3.vi**. Está pronto a iniciar.

Vai encontrar um painel frontal com vários indicadores.



Um visor gráfico simula um ecrã de osciloscópio com uma base de tempo horizontal em **segundos** e uma escala vertical em **Volts**. Existem vários botões para controlar a aquisição, usualmente não será necessário alterar os valores pré-estabelecidos.

**Nº Amostras:** define o intervalo de tempo da sua amostra (nº pontos da amostra). Por defeito, assume-se 6000 o que implica um tempo aproximado de 6.5 s.

**Crítério:** Nº de pontos para detectar um pico. Default 18.

**Physical channel:** O canal de leitura do software instalado. Default Dev1/ai0.

**Limite picos:** Define o patamar a partir do qual queremos detectar picos. Por default assume-se -1.2. Depois de se fazer um 1º lançamento poderemos corrigir esse nível se os resultados obtidos assim o indicarem.

Na parte inferior e lateral direita do painel frontal encontram-se os indicadores numéricos dos resultados obtidos:

**Número de Picos:** indica o nº de picos encontrados, assinalados no mostrador com pequenos rectângulos a verde.

**Tempos sensores:** indica os instantes de passagem pelos detectores representados pela posição dos picos detectados.

Existem ainda 3 botões para manipular o grafismo.

- Com o botão direito do rato podemos escolher **autoscale x** para visualizar todo o tempo de leitura (~ 6.5 s).
- Para ver em pormenor uma parte do gráfico retirar o autoscale x e usar a **lupa** para ampliar a zona a observar.
- A **mão** permite fazer translações no gráfico.
- O botão **+** permite agarrar e deslocar a linha amarela (para adicionar pontos) ou a linha vermelha (para apagar pontos).

Na barra superior do programa existem vários botões, mas só lhe interessa o **Run** representado por uma seta. Ao clicar nele uma vez o programa arranca.

- 1.** Preencha os dados da experiência, a massa e o raio do cilindro, o nº de sensores e o ângulo da rampa. Clique em **Confirmar dados**.
- 2.** Para colher uma amostra tem de clicar em **Ler sensores**. **A partir desse momento tem cerca de 6 s para concretizar o lançamento.**
- 3.** Após a leitura dos sensores acontecem com alguma frequência dois tipos de falhas no procedimento descrito (o número de picos detectados é diferente de 24):
  - 1º - Os picos são visíveis graficamente mas o software não o/os localizou. O detector funcionou mas o software não “apanhou” o pico. Devemos **adicionar** um pico na posição do pico não detectado. Para isso desloque a linha amarela para a posição e clique em **adicionar**.
  - 2º - O mesmo pico é detectado 2 ou mais vezes. Devemos apagar os falsos picos. Para isso desloque a linha vermelha para o pico a apagar e clique em **apagar**.

Quando atingimos os 24 picos o programa avança automaticamente e faz o ajuste polinomial.

#### 4 – Tratamento de dados

Conhecidos os tempos dos 24 sensores, um ecrã mostra a lei dos espaços do cilindro rolando na rampa. Aos pontos obtidos experimentalmente junta-se um modelo de ajuste polinomial do 2º

grau. Sabemos que os pontos devem corresponder ao modelo teórico:  $S = \frac{a}{2}(t - t_0)^2$  onde  **$a$**

representa a aceleração e  $t_0$  o instante de largada do cilindro. Note que, como não temos nenhum detector na posição de largada o instante  $t_0$  não está sinalizado experimentalmente.

Matematicamente corresponde a um polinómio de 2º grau:

$$S = A + B_1 t + B_2 t^2 : A = \frac{a}{2} t_0^2, \quad B_1 = -a t_0, \quad B_2 = \frac{a}{2}$$

O programa mostra-lhe a parábola de ajuste e os seus parâmetros  $A$ ,  $B_1$  e  $B_2$ .

Anote na tabela I do Relatório

Porque nem sempre os programas de ajuste convergem correctamente para o resultado físico esperado, devemos fazer uma verificação dos resultados obtidos.

- Verifique o cálculo da aceleração  **$a$**  ( $a = 2B_2$  no ajuste). Para fazer esta verificação podemos usar 3 instantes de passagem do cilindro pelos detectores, por exemplo  $t_1, t_{12}$  e  $t_{24}$ . Anote estes 3 tempos na tabela II do Relatório. Para encontrar a parábola que passa nestes 3 pontos  $(t_1, 0.1)$   $(t_{12}, 1.2)$  e  $(t_{24}, 2.4)$

Temos de resolver o sistema

$$\begin{cases} A + t_1 B_1 + t_1^2 B_2 = 0.1 \\ A + t_{12} B_1 + t_{12}^2 B_2 = 1.2 \\ A + t_{24} B_1 + t_{24}^2 B_2 = 2.4 \end{cases}$$

A solução é:  $B_2 = \frac{1}{t_{24} - t_{12}} \left( \frac{2.3}{t_{24} - t_1} - \frac{1.1}{t_{12} - t_1} \right)$  e  $B_1 = \frac{1.1}{t_{12} - t_1} - B_2 (t_{12} + t_1)$ . Anote na Tabela do Relatório.

- Verifique o valor do instante de largada  $t_0$  ( $t_0 = -B_1 / (2B_2)$ ). Note que  $t_0$  deve ser um pouco antes do  $t_1$  o instante em que o cilindro passa pelo 1º sensor.
- Usando o valor da aceleração encontrada e o ângulo do plano  $\theta$  podemos determinar o momento de inércia do cilindro usado:  $I = mR^2 \left( \frac{g \sin \theta}{a} - 1 \right)$ .

$m$  = massa total do cilindro,  $R = 24.5$  mm é o raio de rotação da roda que toca no plano.

- Calcule a força de atrito que actua no cilindro  $F_a = \frac{I}{R^2} a$ .

Podemos ainda, usando estes dados, determinar várias grandezas físicas associadas à rotação, num qualquer ponto do plano, nomeadamente no final da rampa.

- Calcular a velocidade linear no último detector (24), ou seja a velocidade no final da rampa. Podemos usar  $v_{24} = a * (t_{24} - t_0)$ . Note que  $t_{24}$  é o instante em que passou no detector 24.
- Calcular a velocidade angular  $\omega_{24}$  no último detector (24)  $v_{24} = \omega_{24} R$ .
- Calcular o momento angular  $L_{24}$  no último detector (24)  $L_{24} = I \omega_{24}$ .
- Faça o cálculo da energia cinética de rotação no final da rampa  $K_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I \left( \frac{v_{24}}{R} \right)^2$
- Preencha as tabelas do Relatório com os dados gerais obtidos nesta experiência.
- Para ter o grafismo da experiência pode guardar o ecrã completo ou apenas cada gráfico individual. Para o ecrã completo utilize o botão no topo, **Guardar imagem**; para um gráfico use o botão direito do rato nele e escolha **Export Simplified Image**. Em qualquer dos casos faça o save to file, por exemplo para o Ambiente de trabalho, para mais tarde juntar ao Relatório e imprimir. **Valide** a experiência para manter em memória os dados de cada uma.

Cada vez que se faz um lançamento, faz-se uma nova aquisição e portanto deve repetir os passos anteriores.

5) Repita os pontos 1 a 4, usando o mesmo ângulo da rampa, mas um cilindro diferente.

6) Repita os 5 pontos anteriores mas para ângulos diferentes do plano: por exemplo  $\theta = 6^\circ, 8^\circ, 10^\circ$ .

7) **FACULTATIVO** Faça uma representação gráfica da energia cinética de rotação no final da rampa  $K_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I \left( \frac{v_{24}}{R} \right)^2$  em função de  $\theta$ . Ajuste os pontos do gráfico com uma função

$F(\theta) = C_1 \sin \theta + C_2$ , onde  $C_1$  e  $C_2$  são constantes. Discuta o significado físico dos termos  $C_1 \sin \theta$  e  $C_2$ . O valor teórico é dado por:

$$K_{\text{rot}}^{\text{teórico}} = \frac{1}{2} I \left( \frac{v}{R} \right)^2 = \frac{I g L \sin \theta}{R^2 \left( 1 + \frac{I}{m R^2} \right)}$$

8) Faça uma apreciação dos resultados obtidos, comparando os valores experimentais com os calculados e tente encontrar um intervalo de erro para o momento de inércia de cada cilindro usado na experiência.

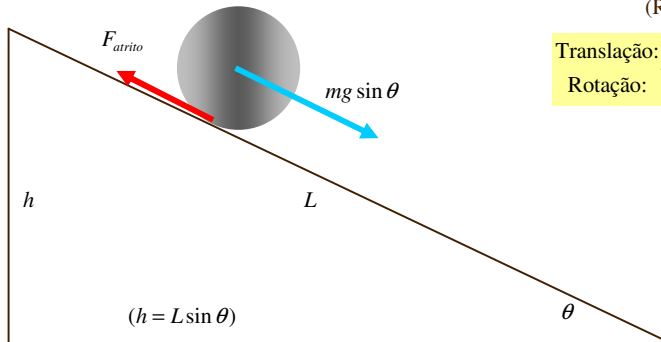
## Apêndice – Formulação teórica

### Corpo que rola num plano inclinado.

(abordagem pelas forças)

#### Equações dinâmicas

(Rolar sem escorregar)



$$\begin{cases} \text{Translação: } & ma = mg \sin \theta - F_a \\ \text{Rotação: } & I\alpha = F_a R \text{ (com } \alpha = a/R) \end{cases}$$

$$\text{Solução: } \begin{cases} a = \frac{g \sin \theta}{1 + \frac{I}{mR^2}} \\ F_a = \frac{I}{R^2} a \end{cases}$$

#### Equações do movimento

$$\begin{cases} v = at \\ L = \frac{1}{2} at^2 \Rightarrow v^2 = 2La \end{cases}$$

#### Velocidade no final da rampa

$$v^2 = \frac{2gh}{1 + \frac{I}{mR^2}}$$

### Corpo que rola num plano inclinado.

(abordagem pela conservação da energia)

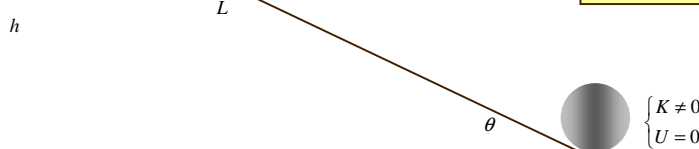
$$\begin{cases} K = 0 \\ U = mgh \end{cases}$$

$$\begin{cases} v = at \\ L = \frac{1}{2} at^2 \Rightarrow a = \frac{v^2}{2L} \end{cases}$$

#### Escorregar sem rolar

$$mgh = \frac{1}{2} mv^2 \Rightarrow v^2 = 2gh$$

$$a = g \frac{h}{L} = g \sin \theta$$



#### Rolar sem escorregar

$$mgh = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} I\omega^2 \Rightarrow v^2 = \frac{2gh}{1 + \frac{I}{mR^2}}$$

$$a = \frac{v^2}{2L} = \frac{1}{2L} \frac{2gh}{1 + \frac{I}{mR^2}} = \frac{g \sin \theta}{1 + \frac{I}{mR^2}}$$

A velocidade no final é **menor** porque gastou energia na rotação.

A aceleração do CM no final é **menor** porque **v** é menor.