Mecânica e Ondas – MO

Cursos LERC e LEE

1º EXAME

TAGUS PARK

2012/2013 – 2º Semestre – 6-06-2013 – 9h00m

Duração: 3h00 Resp: Prof. João Carlos Fernandes (Dep. Física)

NºI_I_I_I_I_I Nome: ________________________

Atenção

Nas respostas que se seguem vai necessitar do seu **nº de aluno**. Em todos os problemas a letra α vai representar o seu último dígito do nº de aluno mais 1.

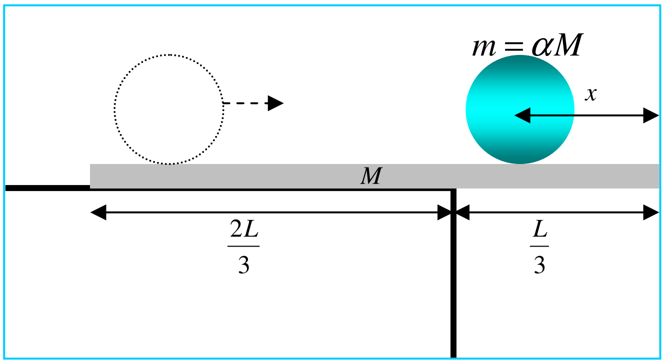
$\alpha =$

Problema 1 (2 valores)

Considere uma tábua de comprimento **L = 6** m e massa **M** assente sobre um degrau de modo que 1/3 do seu comprimento fica de fora.

Sobre a tábua move-se um corpo de massa **m** = α **M** da esquerda para a direita.

Qual a distância **x** (em m) da extremidade da tábua a que o CM do corpo deve estar para que a tábua comece a inclinar em torno da aresta do degrau? (Despreze a espessura da tábua e o raio do corpo).

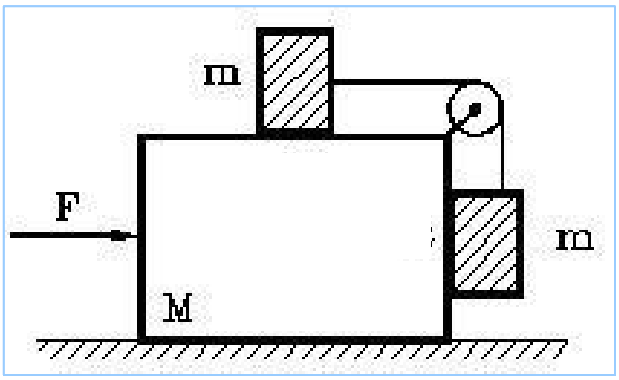


Problema de estática com 2 forças, peso da tábua no deu CM e peso da bola. A extremidade do degrau funciona como fulcro. $Mg\left(\frac{L}{2}-\frac{L}{3}\right) = mg\left(\frac{L}{3}-x\right)$. Obtém-se a solução: $x = 2-\frac{1}{\alpha}$.

Problema 2 (2 valores)

Considere o sistema mecânico constituído por um bloco **M** = α Kg e duas massas idênticas **m = 1** Kg, ligadas por um fio, que escorregam sem atrito sobre as faces horizontal e vertical do bloco. Despreze o atrito entre o bloco e o plano horizontal e a massa da roldana. Atenção: <u>Não se esqueça que a roldana é solidária com o bloco M</u>.

Qual o valor da força exterior **F** que se deve aplicar para manter as duas massas **m** em repouso relativamente ao bloco **M**, enquanto o sistema se desloca como um todo no plano horizontal.



Admitamos que o bloco M se desloca com aceleração a em relação ao plano horizontal.

Se a massa m pendurada está em repouso então $0 = mg - T \Rightarrow T = mg$. Devido à inércia $N = ma$

Se a massa m em cima do bloco está em repouso então $0 = T - ma \Rightarrow T = ma$. Das 2 relações tira-se: $a = g$.

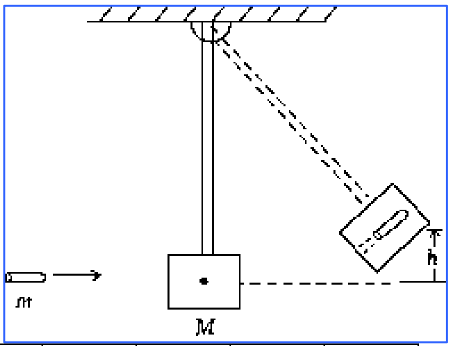
Para o bloco M posso escrever a equação: $Ma = F - T - N$, (este T vem da roldana).

Conclusão: $F = Ma + mg = (\alpha + 2)g$

PROBLEMA 3 (2 valores) :

Uma bala de massa ***m***, viajando com velocidade V_0 atinge e fica incrustada num bloco de um pêndulo matemático de massa ***M =*** α ***m***.
Após a colisão o conjunto eleva-se a uma altura máxima **h = 5 cm**.
Use g = 10 ms^{-2}

Qual a velocidade inicial V_0 da bala em ms^{-1} ?



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

Primeiro temos uma colisão inelástica: $mV_0 = (m+M)V \Rightarrow V = \frac{m}{m+M}V_0 = \frac{1}{1+\alpha}V_0$.

De seguida o conjunto sobe até h havendo conservação da energia mecânica:

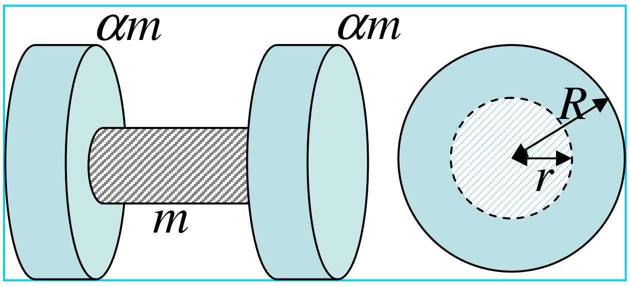
$\frac{1}{2}(m+M)V^2 = (m+M)gh \Rightarrow V = \sqrt{2gh} = 1$. Conclusão: $V_0 = 1+\alpha$

Problema 4 (2 valores)

Considere o haltere da figura, constituído por dois discos de massa α **m** e raio **R** e um cilindro de massa **m = 1** Kg mas com raio $r = \frac{R}{2}$.

Para um eixo de rotação longitudinal sabemos

$$I_{CM}^{disco} = I_{CM}^{cilindro} = \frac{1}{2}mR^2$$



Qual o momento de inércia do haltere em relação ao eixo horizontal.

$\frac{1}{8}R^2$	$\frac{9}{8}R^2$	$\frac{17}{8}R^2$	$\frac{25}{8}R^2$	$\frac{33}{8}R^2$	$\frac{41}{8}R^2$	$\frac{49}{8}R^2$	$\frac{57}{8}R^2$	$\frac{65}{8}R^2$	$\frac{73}{8}R^2$	$\frac{81}{8}R^2$	$\frac{89}{8}R^2$	$\frac{97}{8}R^2$

Sistema constituído por 3 peças, o momento de inércia é a soma dos 3 momentos de inércia individuais.

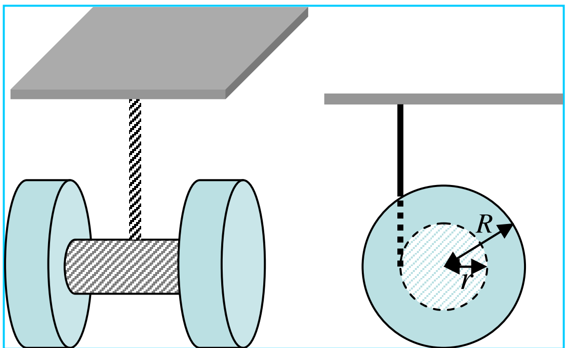
$I = \frac{1}{2}\alpha mR^2 + \frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{2}\alpha mR^2$. Obtemos: $I = \left(\alpha + \frac{1}{8}\right)R^2$

Problema 5 (2 valores)

Considere o haltere do problema anterior, de massa **M** e raios **R e** $r = \frac{R}{2}$**.** Ele tem um fio enrolado à volta do cilindro.

Quando penduramos a ponta do fio (ponta fixa) o haltere cai.

Admitamos: $I_{CM}^{Haltere} = \frac{1}{\alpha}MR^2$



Qual a aceleração linear na queda?

$1/3\,g$	$1/4\,g$	$1/5\,g$	$2/5\,g$	$3/7\,g$	$1/2\,g$	$5/9\,g$	$3/5\,g$	$7/10\,g$	$2/3\,g$	$9/13\,g$	$5/7\,g$	$11/15\,g$

$\begin{cases} Ma = Mg - T \\ I\varepsilon = Tr \\ a = \varepsilon r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Ma = Mg - T \\ \frac{I}{r^2}a = T \end{cases} \Rightarrow \left(M + \frac{I}{r^2}\right)a = Mg \Rightarrow a = \frac{M}{M + \frac{I}{r^2}}g$. Substituindo pela expressão do

I dada obtém-se a solução: $a = \frac{\alpha}{\alpha+4}g$

PROBLEMA 6 (2 valores)

Um satélite artificial de massa **m** está em órbita estável a uma altitude **H.** Sabe-se que a essa altitude o seu peso é dado por $P^* = \frac{1}{(\alpha+1)^2} P$, onde P representa o seu peso à superfície da Terra.

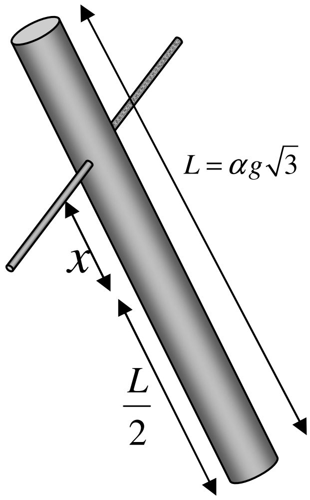
Qual a altitude **H** do satélite?

13R	12R	11R	10R	9R	8R	7R	6R	5R	4R	3R	2R	R

$P^* = \frac{gR^2 m}{r^2} = \frac{1}{(1+\alpha)^2} mg \Rightarrow r = R(1+\alpha)$. Sabendo que $r = R + H$ obtém-se a solução: $H = \alpha R$

PROBLEMA 7 (2 valores)

Considere uma barra homogénea de massa **M** e comprimento $L = \alpha g\sqrt{3}$.
É posta a oscilar em torno de um orifício distando **x** do seu centro de massa.
Calcule o seu período de oscilação **mínimo**.



Comecemos por calcular o momento de inércia da barra em relação ao eixo de rotação: $I = \frac{1}{12}ML^2 + Mx^2$.
A distância entre o centro de massa e o eixo de rotação é x.
Podemos escrever a expressão do período: $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgx}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{12}ML^2 + Mx^2}{Mgx}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{12}L^2 + x^2}{gx}}$. Para que o período seja mínimo a sua derivada deve ser nula.

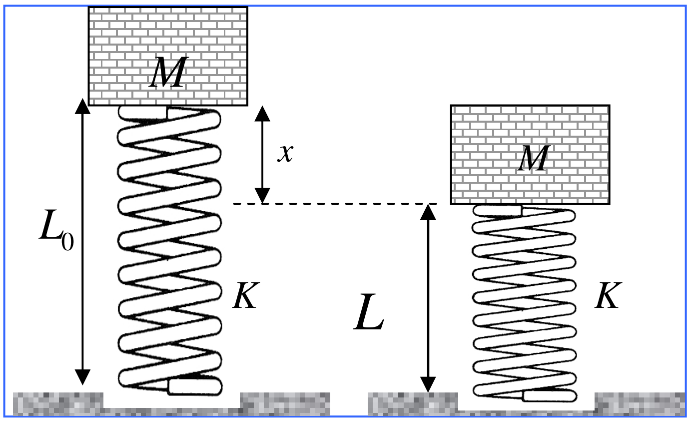
$\frac{dT}{dx} = 0 \Rightarrow x.2x = \frac{1}{12}L^2 + x^2 \Rightarrow x = \frac{L}{\sqrt{12}}$. Substituindo na expressão de T obtém-se o resultado pretendido:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{g\sqrt{12}}} = 2\pi\sqrt{\alpha}$$

PROBLEMA 8 (2 valores)

A mola da figura está colocada verticalmente, tem constante **K** e comprimento próprio $L_0 = 30g$.

Deixa-se cair em cima uma massa $M = \alpha K$, a partir de L_0.



Qual a contracção máxima x da mola ?

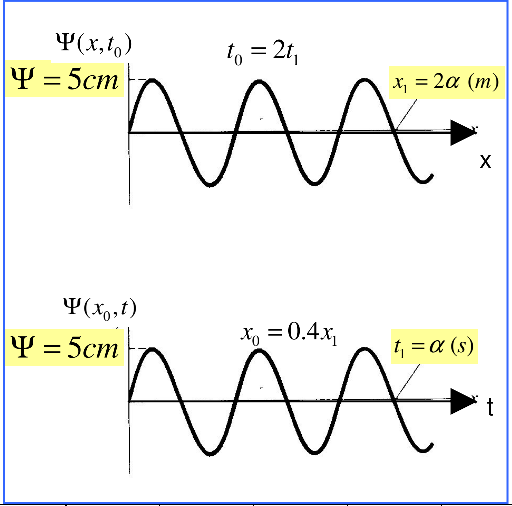
24g	22g	20g	18g	16g	14g	12g	10g	8g	6g	4g	2g	g

Problema de conservação da energia mecânica.

$MgL_0 = Mg(L_0 - x) + \frac{1}{2}Kx^2 \Rightarrow x = \frac{2Mg}{K}$. Solução: $x = 2\alpha g$

PROBLEMA 9 (2 valores)

As figuras representam uma função de onda. A superior uma foto tirada no instante t_0 e a inferior a oscilação do ponto x_0.



a) Qual o comprimento de onda λ em (m)?

10.4	9.6	8.8	8.0	7.2	6.4	5.6	4.8	4.0	3.2	2.4	1.6	0.8

$2.5\lambda = x_1 = 2\alpha$. Solução: $\lambda = 0.8\alpha$

b) Qual o período T em (s)?

5.2	4.8	4.4	4.0	3.6	3.2	2.8	2.4	2.0	1.6	1.2	0.8	0.4

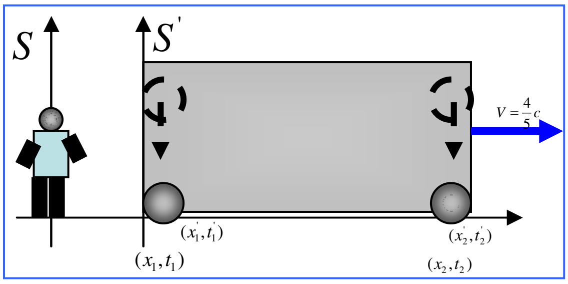
$2.5T = t_1 = \alpha$. Solução: $T = 0.4\alpha$

c) Qual das seguintes expressões pode representar a função de onda $\Psi(x,t)$?

$$\begin{cases} \lambda = 0.8\alpha \\ T = 0.4\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K = \dfrac{2\pi}{\lambda} = \dfrac{2\pi}{0.8\alpha} = \dfrac{5\pi}{2\alpha} \\ \omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{2\pi}{0.4\alpha} = \dfrac{5\pi}{\alpha} \end{cases}$$. A função de onda vem:

$$\psi = 5\sin(Kx - \omega t) = 5\sin\left(\frac{5\pi}{2\alpha}x - \frac{5\pi}{\alpha}t\right).$$ Solução: $\Psi = 5\sin\left[\dfrac{5\pi}{\alpha}\left(\dfrac{x}{2} - t\right)\right]$

PROBLEMA 10 (2 valores)



Um comboio com o comprimento próprio **L** desloca-se com velocidade $V = \frac{4}{5}c$, ou seja um $\gamma = \dfrac{5}{3}$.

Quando passa pela estação os tripulantes acertam os seus relógios a zeros com o chefe da estação. (x_1', t_1')

Em cada uma das extremidades do comboio está um tripulante com uma esfera na mão. No instante t=0 do seu relógio deixam cair a esfera na vertical. Elas chegam ao solo 1 segundo depois, em cada uma das extremidades. Por acaso o chão do comboio estava roto e as esferas caíram em terra.

a) Escreva as coordenadas do impacto de cada esfera (x_1', t_1') e (x_2', t_2') com o chão no referencial S' do comboio.

Esfera 1: $(0,1)$. Esfera 2 : $(L,1)$

b) Escreva as coordenadas do impacto de cada esfera (x_1, t_1) e (x_2, t_2) com o chão no referencial S da estação.

Esfera 1: $$\begin{cases} x_1 = \gamma\left(x_1' + Vt_1'\right) = \gamma V = \dfrac{4}{3}c \\ t_1 = \gamma\left(t_1' + \dfrac{V}{c^2}x_1'\right) = \gamma = \dfrac{5}{3} \end{cases}$$. Esfera 2: $$\begin{cases} x_2 = \gamma\left(x_2' + Vt_2'\right) = \gamma(L+V) = \dfrac{4}{3}c + \dfrac{5}{3}L \\ t_2 = \gamma\left(t_2' + \dfrac{V}{c^2}x_2'\right) = \gamma\left(1 + \dfrac{VL}{c^2}\right) = \dfrac{5}{3} + \dfrac{4L}{3c} \end{cases}$$

c) Explique porque é que $x_2 - x_1$ não pode ser **L**, nem o comprimento do comboio no referencial S?

Porque $t_2 > t_1$. A esfera 2 cai depois da esfera 1 e portanto a distância não pode ser um comprimento.