INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

Mecânica e Ondas – MO

Cursos LERC e LEE

2º TESTE

TAGUS PARK

2012/2013 – 2º Semestre – 6-06-2013 – 9h00m

Duração: 1h30 Resp: Prof. João Carlos Fernandes (Dep. Física)

NºI_I_I_I_I_I Nome: ________________________

Atenção

Nas respostas que se seguem vai necessitar do seu **nº de aluno**. Em todos os problemas a letra α vai representar o seu último dígito do nº de aluno mais 1.

$\alpha =$

--- ------

PROBLEMA 1 (4 valores)

Um satélite artificial de massa **m** está em órbita estável a uma altitude **H.** Sabe-se que a essa altitude o seu peso é dado por $P^* = \frac{1}{(\alpha+1)^2}P$, onde P representa o seu peso à superfície da Terra.

a) Qual a altitude **H** do satélite?

13R	12R	11R	10R	9R	8R	7R	6R	5R	4R	3R	2R	R

$P^* = \frac{gR^2m}{r^2} = \frac{1}{(1+\alpha)^2}mg \Rightarrow r = R(1+\alpha)$. Sabendo que $r = R + H$ obtém-se a solução: $H = \alpha R$

b) Em certo momento perde um quarto da sua energia cinética $K^* = \frac{3}{4}K$. Determine qual a nova altitude **h** onde encontra uma orbita estável.

$\frac{1}{3}R$	$\frac{5}{3}R$	$3R$	$\frac{13}{3}R$	$\frac{17}{3}R$	$7R$	$\frac{25}{3}R$	$\frac{29}{3}R$	$11R$	$\frac{37}{3}R$	$\frac{41}{3}R$	$15R$	$\frac{49}{3}R$

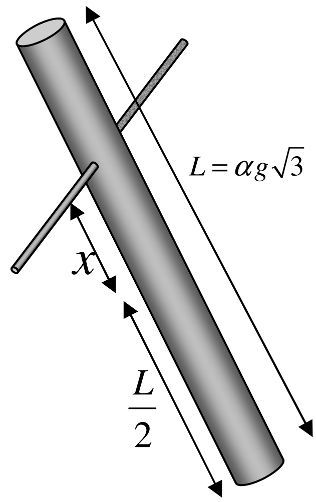
Começamos por relacionar as velocidades nas duas órbitas: $\frac{1}{2}mV^{*2} = \frac{3}{4}\frac{1}{2}mV^2 \Rightarrow V^{*2} = \frac{3}{4}V^2$.

Num satélite a força centrífuga iguala o peso: $m\frac{V^2}{r} = g\frac{R^2m}{r^2} \Rightarrow V^2 = g\frac{R^2}{r}$.

Usando as velocidades: $g\frac{R^2}{r^*} = \frac{3}{4}g\frac{R^2}{r} \Rightarrow r^* = \frac{4}{3}r \Rightarrow R + h = \frac{4}{3}(R+H)$. Solução: $h = \frac{1+4\alpha}{3}R$

PROBLEMA 2 (4 valores)

Considere uma barra homogénea de massa **M** e comprimento $L = \alpha g\sqrt{3}$.
É posta a oscilar em torno de um orifício distando **x** do seu centro de massa.
Calcule o seu período de oscilação **mínimo**.



Comecemos por calcular o momento de inércia da barra em relação ao eixo de rotação: $I = \frac{1}{12}ML^2 + Mx^2$.

A distância entre o centro de massa e o eixo de rotação é x.
Podemos escrever a expressão do período: $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgx}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{12}ML^2 + Mx^2}{Mgx}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{12}L^2 + x^2}{gx}}$. Para que o período seja mínimo a sua derivada deve ser nula.

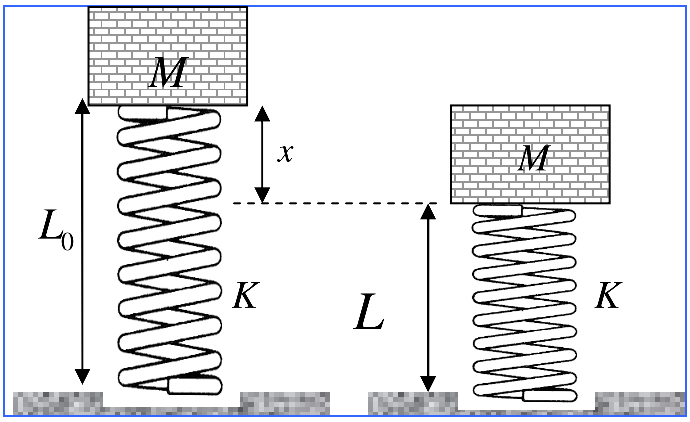
$$\frac{dT}{dx} = 0 \Rightarrow x.2x = \frac{1}{12}L^2 + x^2 \Rightarrow x = \frac{L}{\sqrt{12}}.$$

Substituindo na expressão de T obtém-se o resultado pretendido: $T = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{g\sqrt{12}}} = 2\pi\sqrt{\alpha}$

PROBLEMA 3 (3 valores)

A mola da figura está colocada verticalmente, tem constante **K** e comprimento próprio $L_0 = 30g$.

Deixa-se cair em cima uma massa $M = \alpha K$, a partir de L_0.



Qual a contracção máxima x da mola ?

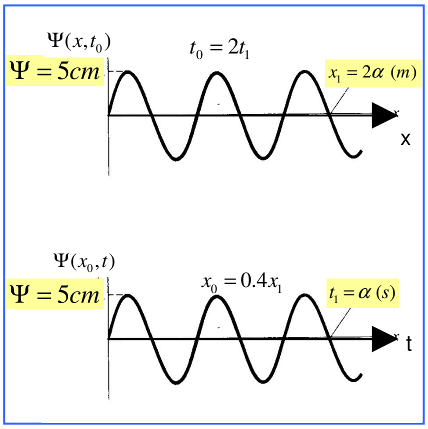
24g	22g	20g	18g	16g	14g	12g	10g	8g	6g	4g	2g	g

Problema de conservação da energia mecânica.

$MgL_0 = Mg\left(L_0 - x\right) + \frac{1}{2}Kx^2 \Rightarrow x = \frac{2Mg}{K}$. Solução: $x = 2\alpha g$

PROBLEMA 4 (5 valores)

As figuras representam uma função de onda. A superior uma foto tirada no instante t_0 e a inferior a oscilação do ponto x_0.



a) Qual o comprimento de onda λ em (m)?

10.4	9.6	8.8	8.0	7.2	6.4	5.6	4.8	4.0	3.2	2.4	1.6	0.8

$2.5\lambda = x_1 = 2\alpha$. Solução: $\lambda = 0.8\alpha$

b) Qual o período T em (s)?

5.2	4.8	4.4	4.0	3.6	3.2	2.8	2.4	2.0	1.6	1.2	0.8	0.4

$2.5T = t_1 = \alpha$. Solução: $T = 0.4\alpha$

c) Qual das seguintes expressões pode representar a função de onda $\Psi(x,t)$?

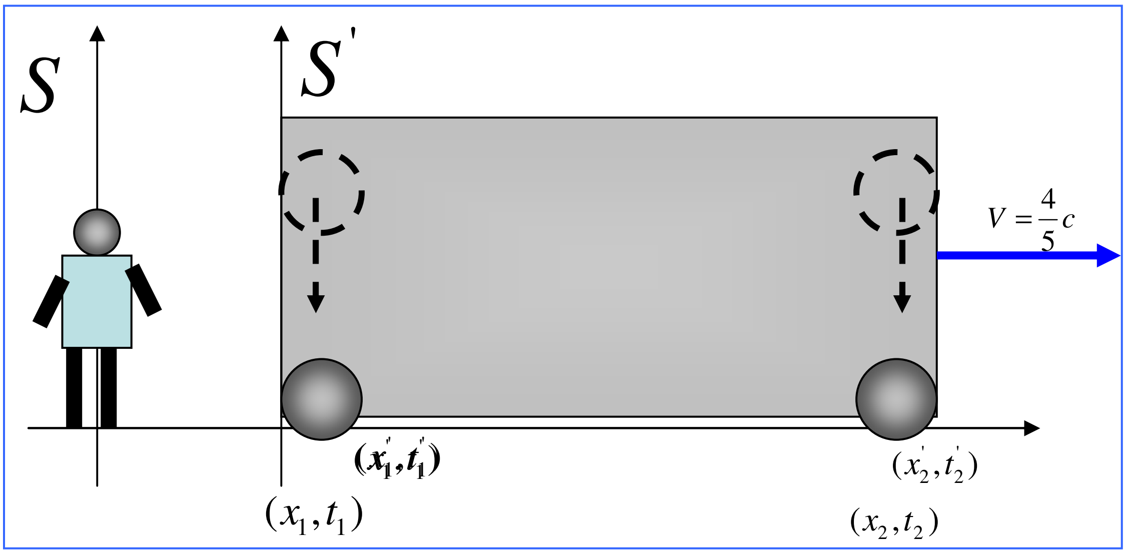
$$\begin{cases} \lambda = 0.8\alpha \\ T = 0.4\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K = \dfrac{2\pi}{\lambda} = \dfrac{2\pi}{0.8\alpha} = \dfrac{5\pi}{2\alpha} \\ \omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{2\pi}{0.4\alpha} = \dfrac{5\pi}{\alpha} \end{cases}$$
. A função de onda vem:

$\psi = 5\sin(Kx - \omega t) = 5\sin\left(\dfrac{5\pi}{2\alpha}x - \dfrac{5\pi}{\alpha}t\right)$. Solução: $\Psi = 5\sin\left[\dfrac{5\pi}{\alpha}\left(\dfrac{x}{2} - t\right)\right]$

PROBLEMA 5 (4 valores)

Um comboio com o comprimento próprio **L** desloca-se com velocidade $V = \frac{4}{5}c$, ou seja um $\gamma = \frac{5}{3}$. Quando passa pela estação os tripulantes acertam os seus relógios a zeros com o chefe da estação.

Em cada uma das extremidades do comboio está um tripulante com uma esfera na mão. No instante t=0 do seu relógio deixam cair a esfera na vertical. Elas chegam ao solo 1 segundo depois, em cada uma das extremidades. Por acaso o chão do comboio estava roto e as esferas caíram em terra.



a) Escreva as coordenadas do impacto de cada esfera (x_1', t_1') e (x_2', t_2') com o chão no referencial S' do comboio.

Esfera 1: $(0,1)$. Esfera 2 : $(L,1)$

b) Escreva as coordenadas do impacto de cada esfera (x_1, t_1) e (x_2, t_2) com o chão no referencial S da estação.

Esfera 1: $\begin{cases} x_1 = \gamma\left(x_1' + Vt_1'\right) = \gamma V = \frac{4}{3}c \\ t_1 = \gamma\left(t_1' + \frac{V}{c^2}x_1'\right) = \gamma = \frac{5}{3} \end{cases}$. Esfera 2: $\begin{cases} x_2 = \gamma\left(x_2' + Vt_2'\right) = \gamma\left(L + V\right) = \frac{4}{3}c + \frac{5}{3}L \\ t_2 = \gamma\left(t_2' + \frac{V}{c^2}x_2'\right) = \gamma\left(1 + \frac{VL}{c^2}\right) = \frac{5}{3} + \frac{4L}{3c} \end{cases}$

c) Explique porque é que $x_2 - x_1$ não pode ser **L**, nem o comprimento do comboio no referencial S?

Porque $t_2 > t_1$. A esfera 2 cai depois da esfera 1 e portanto a distância não pode ser um comprimento.